第１問（必答問題）（配点 30）

次の大濱さんと勝岡さんの会話を読み，問題に答えよ．

大濱：鴨川には，カップルが等間隔に座ると言われているよ．
勝岡：みんな適当に座るのに全体を見れば等間隔に見えるのは面白いね．
大濱：座る位置を確率変数として，2 組のカップルの距離の期待値と分散を求めてみたいな．
勝岡：問題設定を簡略化して，計算してみよう．

〔1〕$\mathbb{R}$ 上の一様分布 $U(0,1)$ にしたがう 2 つの独立な確率変数 X_1，X_2 の距離 $D_X = |X_1 - X_2|$ の期待値 $E[D_X]$ と分散 $V[D_X]$ を求めよう．

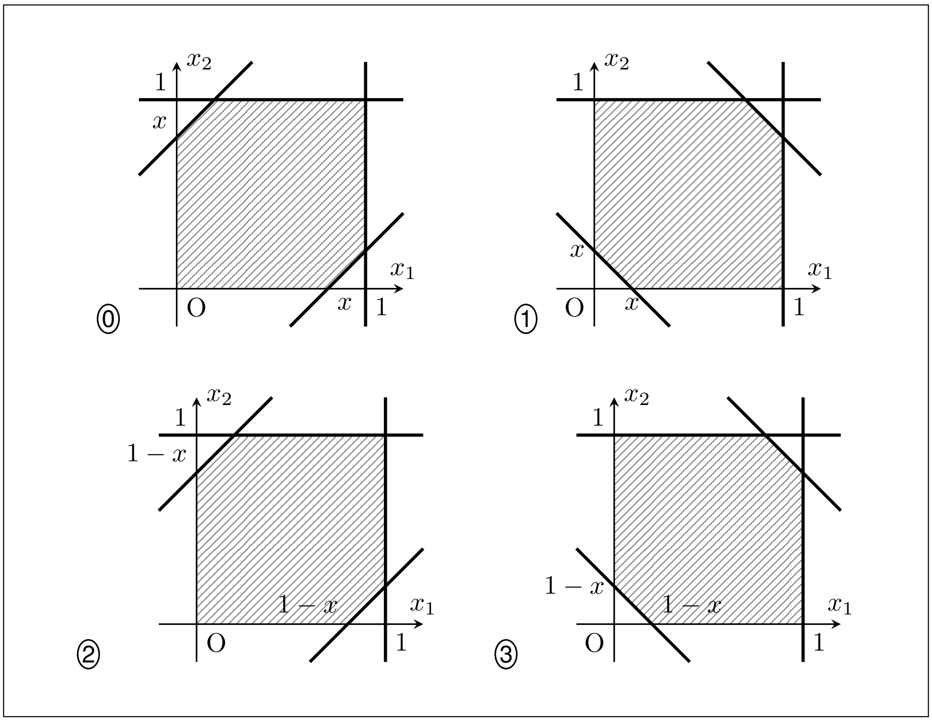
（1）$f(x)$ を D_X の確率密度関数，$F(x)$ をその累積分布関数とすると，

$$F(x) = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{x} f(t)dt \qquad \cdots①$$

が成り立つ．

（2）$F(x) = P(D_X \leq x)$ を図形的に捉えてみよう．x_1x_2 平面上で，$|x_1 - x_2| \leq x, 0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ を満たす (x_1, x_2) の存在範囲は図 $\boxed{\text{イ}}$ の斜線部分の内部および周上である．

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群



（確率・統計の問題は次ページに続く．）

X_1, X_2 は独立に $U(0,1)$ にしたがうので，斜線部分の面積が $[0,1]\times[0,1]$ の面積 に占める割合が $P(|X_1 - X_2| \leq x)$ である．したがって，

$$F(x) = -x^2 + \boxed{\text{ウ}}x$$

①より，

$$f(x) = -\boxed{\text{エ}}x + \boxed{\text{オ}}$$

したがって，D_X の期待値と分散は

$$E[D_X] = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\quad V[D_X] = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

と求められる．

〔2〕

大濱：実際の間隔がどうかより，2 次元に拡張したらどうなるかの方が気になってきたな．
勝岡：1 次元の計算を利用して拡張してみよう．

次に，$\mathbb{R}^2$ 上の一様分布 $U([0,1]\times[0,1])$ にしたがう 2 つの独立な確率変数 $A = (X_1, Y_1), B = (X_2, Y_2)$ の距離 $D = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$ の期待値 $E[D]$ と分散 $V[D]$ を求めよう．

(1) $U = |X_1 - X_2|, V = |Y_1 - Y_2|$ とすると，$D = \sqrt{U^2 + V^2}$ であり，U, V の確率密度関数は $f(x)$ であるから，

$$f(u) = -\boxed{\text{エ}}u + \boxed{\text{オ}},\quad f(v) = -\boxed{\text{エ}}v + \boxed{\text{オ}}$$

とおく．U, V は独立であるから，同時確率密度関数は，$f(u)f(v)$ である．したがって，

$$E[D] = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \sqrt{u^2 + v^2} f(u)f(v)dudv$$

ここで，

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \sqrt{u^2+v^2}dudv = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \log(\sqrt{\boxed{\text{シ}}} + \boxed{\text{ス}})}{\boxed{\text{セ}}}$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} u\sqrt{u^2+v^2}dudv = \iint_{[0,1]\times[0,1]} v\sqrt{u^2+v^2}dudv$$

$$= \frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}} - \boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}\log(\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}})}{\boxed{\text{テト}}}$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} uv\sqrt{u^2+v^2}dudv = \frac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

（確率・統計の問題は次ページに続く．）

であることを用いると，

$$E[D] = \frac{\boxed{ハ} + \sqrt{\boxed{ヒ}} + \boxed{フ}\log(\boxed{シ} + \sqrt{\boxed{ス}})}{\boxed{ヘホ}}$$

と求められる．

(2) U, V は独立なので，

$$\begin{aligned} E[D^2] &= E[U^2] + E[V^2] \\ &= \frac{\boxed{マ}}{\boxed{ミ}} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} V[D] = &\frac{\boxed{ムメ} - \boxed{モ}\sqrt{\boxed{ヒ}}}{\boxed{ヤユヨ}} \\ &- \frac{\boxed{ラ}(\boxed{リ} + \sqrt{\boxed{ヒ}})}{\boxed{ルレ}}\log(\boxed{サ} + \sqrt{\boxed{シ}}) \\ &- \frac{\{\log(\boxed{サ} + \sqrt{\boxed{シ}})\}^2}{\boxed{ロワ}} \end{aligned}$$

と求められる．